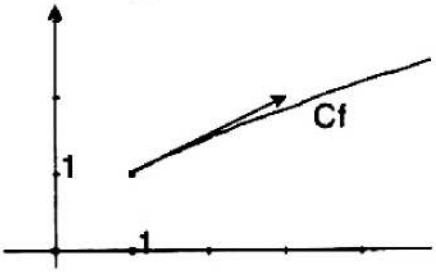
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\overbrace{\left(1-\frac{1}{x}\right)}^{1}}{\underbrace{\left(\frac{Lnx}{x}\right)}_{0^+}} = +\infty$$

b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(1-\frac{1}{x}\right).\frac{1}{Lnx} = 0$

(C) admet une B.I parabolique de diréction celle de $(o,\vec{i})$

$*f'_d(1) = \frac{1}{2}$



II)

$$F(x) = \begin{cases} \int_x^{x^2} \frac{1}{Lnt}dt & si\ x>1 \\ Ln2 & si\ x=1 \end{cases}$$

1)

a) $x>1$

$x \le t \le x^2 \Rightarrow \frac{x}{tLnt} \le \frac{1}{Lnt} \le \frac{x^2}{tLnt}$

Car $tLnt > 0$

b) $\frac{x}{tLnt} \le \frac{1}{Lnt} \le \frac{x^2}{tLnt}$

pour $t \in [x, x^2]$

$$\Rightarrow \int_x^{x^2} \frac{x}{tLnt}dt \le \int_x^{x^2} \frac{dt}{Lnt} \le \int_x^{x^2} \frac{x^2}{tLnt}dt$$

$$\Rightarrow x.\left[Ln(Lnt)\right]_x^{x^2} \le F(x) \le x^2.\left[Ln(Lnt)\right]_x^{x^2}$$

$$\Rightarrow xLn2 \le F(x) \le x^2Ln2$$

c) $\lim_{x\to1^+} xLn2 = \lim_{x\to1^+} x^2Ln2 = Ln2 = F(1)$

d'où F est continue a droite en 1.

3)

a) la fonction $U : t \mapsto \frac{1}{Lnt}$ est continue sur $]1,+\infty[$, soit V une primitive de U sur $]1,+\infty[$

$F(x) = \left[V(t)\right]_x^{x^2}$

$F(x) = V(x^2) - V(x)$

V est dérivable sur $]1,+\infty[$

$x \mapsto V(x^2)$ est dérivable sur $]1,+\infty[$

(composée de deux fonctions dérivables)

D'où F est dérivable sur $]1,+\infty[$

$$\begin{aligned} F'(x) &= 2x.V'(x^2) - V'(x) \\ &= 2xU(x^2) - U(x) \\ &= 2x\frac{1}{Ln(x^2)} - \frac{1}{Lnx} \\ &= \frac{2x}{2Lnx} - \frac{1}{Lnx} = \frac{x-1}{Lnx} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

b) $x>1$

F est continue sur $[1,x]$ dérivable sur $]1,x[$

D'après le théorème des Acc.finis

Il existe $c \in]1,x[$ tel que :

$F(x) - F(1) = (x-1).F'(c)$

c) lorsque :

$x \to 1^+$

$c \to 1^+$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to1^+} \frac{F(x)-F(1)}{x-1} &= \lim_{x\to1^+} F'(c) \\ &= \lim_{x\to1^+} f(c) \\ &= f(1) = 1 \end{aligned}$$

Car f est continue en 1 à droite, d'où F est dérivable à droite en 1 et $F'_d(1) = 1$

Qarray.tn -Agra Blech- Qarray.tn